В прошлый раз мы познакомились с законом Био-Савара-Лапласа – аналогом

$$E(\vec{r}) = \frac{q \text{ в точке } \vec{r_I}}{|\vec{r} - \vec{r_I}|^2}$$

Но где в магнитостатике аналог

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q \text{ в точке } \vec{r_I}}{|\vec{r} - \vec{r_I}|}$$

Иначе говоря, есть ли у магнитного поля какой-то потенциал?

Оказывается, да. Но не скалярный, векторный.
Если $\vec{E}$ можно представить как $-\,grad\ \varphi$, так и $\vec{B}$ можно представить как

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}$$

И величина $\vec{A}$ называется векторным потенциалом.

О чём хочу поговорить я? Зачем нужен скалярный потенциал φ, нам понятно. А зачем нам нужен векторный потенциал $\vec{A}$? Зачем нам нужно вместо одного вектора – другой вектор?

Фейнман посвящает в 6-м томе этому вопросу целую главу (она так и называется: «B или A»). Но он там говорит, «в будущем, теормехе-квантмехе, нам потребуется $\vec{A}$». Он, конечно, прав – но хотелось бы какого-то аргумента, понятного именно сейчас, в 3-м семестре. И он есть у меня.

Все вектора в физике делятся на полярные (они же истинные) и аксиальные (они же псевдовекторы). Из названий видно, что вторые какие-то плохие. Так оно и есть.

Большинство векторов в физике истинные:

$$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$$
$$\vec{F}$$
$$\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{d} \text{ (дипольный момент)}$$

Какие же векторы на самом деле плохие – псевдовекторы? Это все связанные со вращением:

$$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon} \text{ (угловое ускорение)}, \vec{M}, \vec{L}$$

И с магнитным полем:

$$\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}, \vec{m} \text{ (магнитопольный момент)}$$

Кроме $\vec{A}$. $\vec{A}$ – истинный вектор.

Полярные, истинные вектора	Аксиальные псевдовектора
$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ $\vec{F}$ $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \vec{d}$ $\vec{A}$	$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{M}, \vec{L}$ $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}, \vec{m}$

Что это значит?

Про договорённости
Вспомним школу – а там были правила правой руки, левой руки. Потом было правило векторного произведения с «против часовой стрелки». Везде это следствие человеческих договорённостей.
Так вот, истинные векторы не поменяются, если договорённость поменять на противоположную, а пседовекторы поменяют своё направление.

В самом деле:

$$\vec{L} = [\vec{r} \text{ x } \vec{p}]$$

перемножаются векторно два полярных вектора. Но т.к. векторное произведение содержит «договорённость», результат $\vec{L}$ – аксиальный вектор.

$$\vec{F} = [\vec{v} \text{ x } \vec{B}]$$

$\vec{F}$ и $\vec{v}$ точно полярные вектора. Значит, $\vec{B}$ должна быть псевдовектором, чтобы «баш на баш» псевдовектор на псевдовектор дал истинный вектор («договорённость сработала два раза»)

$$E = -\vec{m}\vec{B}$$

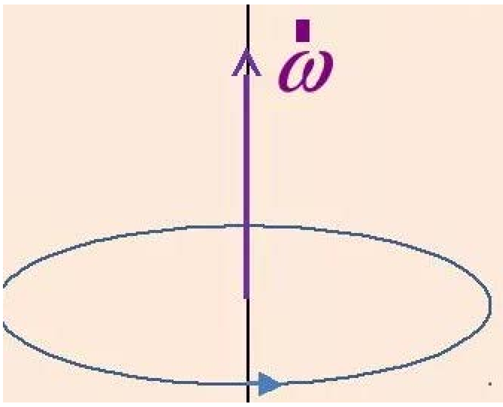
Формула энергии магнитополя. Мы уже выяснили, что $\vec{B}$ псевдовектор; скалярные произведение «договорённости» не содержит, Е, как и любой скаляр, является «истинной» физвеличиной, не зависящей от «договорённости». Получаем, что $\vec{m}$ псевдовектор.

$$\vec{M} = -[\vec{m}\text{x}\vec{B}]$$

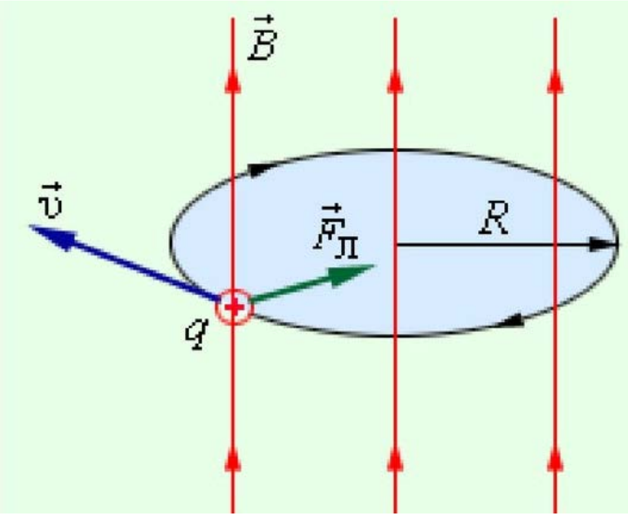
Моя любимая формула, где в правой части сразу три «договорённости» ☺

Ну и т.к. $\vec{B} = rot\ \vec{A}$, $\vec{A}$ – истинный вектор.

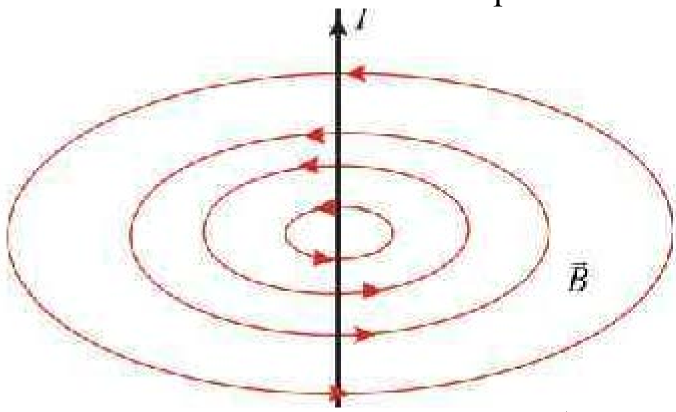
Физсмысл всего этого
Вероятно, читатель уже до этого нутрмо чуял, что вектора, попавшие в категорию псевдовекторов, «плохие».
В направлении, куда они показывают, ничего особо не происходит. Происходит как раз в плоскости, нормальной к вектору – там обычно происходит какое-то вращение.
Вспомним:



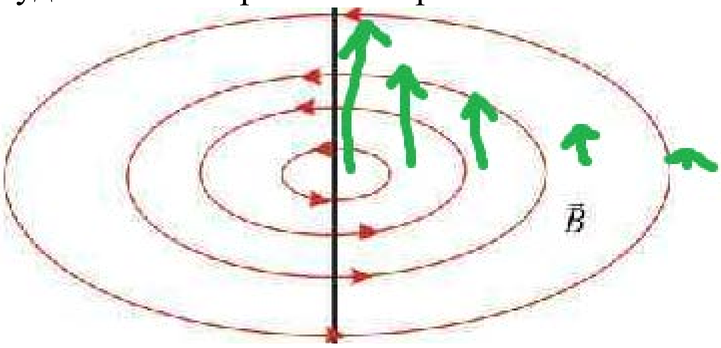
Вращение заряда в однородном магнитном поле:



И особенно магнитное поле от прямого источника тока:



Куда на этой картинке направлено $\vec{A}$? Ответ: по току!



По току, Карл! Очень логично – ток порождает магнитное поле – и оно направлено потоку, а не торчит куда-то вбок.

Закон Био-Савара-Лапласа для $\vec{A}$ записывается очень просто:

$$\vec{A} = C * \frac{\vec{I}}{r} \quad \left(\text{ср. с } \varphi = C_1 * \frac{q}{r}\right)$$

Константы не пишу специально, они зависят от системы (СИ, СГС, СГС с рационализацией Хевисайда) и в данном случае они нам не важны.

Сравните с Био-Саваром-Лапласом для $\vec{B}$:

$$\vec{B} = C * \frac{[\vec{I} \times \vec{r}]}{r^3} \ (\text{ср. } \ \vec{E} = C_1 * \frac{q\vec{r}}{r^3})$$

Противное векторное произведение!

Зачем тогда B?

После моей хлобной оды векторному потенциалу о$\vec{A}$

Так что давайте восстановим баланс и зададимся вопросом: если $\vec{A}$ такое хорошее, зачем нам тогда нужна магнитная индукция $\vec{B}$? Всё ради силы Лоренца:

$$\vec{F} = [\vec{v} \times \vec{B}]$$

Можно ли её записать через $\vec{A}$? Да, но результат вам не понравится:

$$\vec{F} = [\vec{v} \times rot\ \vec{A}]$$

$$rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

(сообразите, где определитель содержит в себе «договорённость»? Ответ: в том, что главная диагональ идёт слева сверху вправо вниз, а не справа сверху влево вниз).

$$F_z = v_x \left(rot\ \vec{A}\right)_y - v_y \left(rot\ \vec{A}\right)_x = v_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - v_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)$$
$$= v_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial A_z}{\partial y} - \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)$$

Ну и тут хоть и видна симметрия относительно x и y, выражение получилось достаточно сложным.

Три шага вместо двух

Если раньше взаимодействие заряженных фигонь обеспечивалось двумя стадиями:

первая фигня создаёт поле

вторая фигня на её реагирует

то с помощью потенциалов можно выделить уже три стадии:

первая фигня создают потенциалы φ, A

φ,A порождают E и B

вторая фигня на E и B реагирует

Подобная стадия кажется лишним, но в электроде станет очевидно, что именно этот подход наиболее нагляден.